

類 科：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科 目：工程數學

考試時間：2 小時

座號：_____

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：(50 分)

- (一)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
- (二)請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
- (三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、空間上有 $a = (1,1,1)$, $b = (3,4,5)$, $c = (2,3,4)$, $d = (1,2,2)$ 四點，求 \overrightarrow{ab} , \overrightarrow{ac} 和 \overrightarrow{ad} 三個向量作為三邊所組成平行四邊體的體積？(10 分)

二、假設路徑 C 是一逆時針的正方形邊界，其各邊位於直線 $x = \pm 2$ 和 $y = \pm 2$ 之上。請求出下列積分值：

(一) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$ (7 分)

(二) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$ (8 分)

三、利用積分因子，解微分方程式 $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$, $y(2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 之解。(15 分)

四、設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(一)求 A 的特徵值 (eigenvalues) (5 分)

(二)求 A 的特徵向量 (eigenvectors) (5 分)

乙、測驗題部分：(50 分)

代號：2266

- (一)本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
- (二)共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 V 及 W 是有限維度的空間向量， T 為 $V \rightarrow W$ 的函數，下列敘述何者正確？

- (A)若 $T(x+y) = T(x)+T(y)$ ，則 T 為線性變換
- (B) T 為一對一函數，若且唯若 $N(T) = \{0\}$ ，其中 $N(T)$ 為 T 的 Null space
- (C)若 T 為線性變換，則 $nullity(T) + rank(T) = dim(V)$
- (D)若 $x_1, x_2 \in V$ ， $y_1, y_2 \in W$ ，則必定存在一線性變換 $T: V \rightarrow W$ 使得 $T(x_1) = y_1$ 及 $T(x_2) = y_2$

- 2 試決定下列各個線性變換 T ，何者不是一對一線性變換？
 (A) $T:R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (y, x)$ (B) $T:R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$
 (C) $T:R^2 \rightarrow R^3$, $T(x, y) = (x, y, x + y)$ (D) $T:R^2 \rightarrow R^3$, $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$
- 3 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ ，試問 $\text{Rank}(A^T B)$ 為何？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 4 求 $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{100} = ?$
 (A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- 5 線性轉換 $L: R^3 \rightarrow R^3$, $L(x, y, z) = (2x + 3y + z, 3x + 3y + z, 2x + 4y + z)$ ，試求其逆轉換為何？
 (A) $L^{-1}(x, y, z) = (-x + y, -x + z, 6x - 2y - 3z)$
 (B) $L^{-1}(x, y, z) = (-2x - 3y - z, -3x - 3y - z, -2x - 4y - z)$
 (C) $L^{-1}(x, y, z) = (0.5x + 0.3y + z, 0.3x + 0.3y + z, 0.5x + 0.25y + z)$
 (D) $L^{-1}(x, y, z) = (2x + y + z, x + 3y + z, x + 4y + z)$
- 6 下列何者不是矩陣 $\begin{bmatrix} 5 & 32 & 17 \\ 0 & 12 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ 的特徵值？
 (A) 5 (B) 8 (C) 11 (D) 14
- 7 給定一複數函數為 $f(z) = r^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + ir^{\frac{1}{3}} \sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right)$ ，其中 $z = x + yi = re^{i\theta}$ ，請問在 $\pi < \theta \leq 3\pi$ 範圍內， $f(1+i) = ?$
 (A) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}$ (B) $\sqrt[3]{2}e^{-\frac{3}{4}i\pi}$ (C) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{17}{12}i\pi}$ (D) $\sqrt[3]{2}e^{-\frac{17}{12}i\pi}$
- 8 曲線 $C: y = x^2$ ，從 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ ，求 $\int_C z^2 dz = ?$
 (A) $-\frac{88}{3} - \frac{16}{3}i$ (B) $-\frac{88}{3} + \frac{16}{3}i$ (C) $\frac{88}{3} - \frac{8}{3}i$ (D) $-\frac{88}{3} - \frac{8}{3}i$
- 9 求複變級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} (z+i)^{2n}$ 之中心點 (center) 及收斂半徑 (radius of convergence)：
 (A) 中心點 (center) 為 i ，收斂半徑為 e (B) 中心點 (center) 為 $-i$ ，收斂半徑為 $1/e$
 (C) 中心點 (center) 為 $-i$ ，收斂半徑為 $1/\sqrt{e}$ (D) 中心點 (center) 為 i ，收斂半徑為 \sqrt{e}
- 10 令 $y = a \cos(3x) + b \sin(3x) + c \cos(4x)$ 為微分方程式 $y'' + 9y = 14 \cos(4x)$ 之解，其中 $y(0) = 0$ ， $y'(0) = 3$ ，求 $a+b+c$ 值？
 (A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 8
- 11 求 $\frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$ 之拉普拉斯轉換 (Laplace Transform)，為下列何者？
 (A) $\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (B) $\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (C) $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ (D) $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

- 12 下列何者是微分方程式 $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = x^2 + 1$ 的解？（選項中 c_1 和 c_2 為任意常數，而 a_1 和 a_2 為某特定常數。）
- (A) $c_1x^2 + c_2x^2 \ln(x) + a_1 + a_2x^2(\ln(x))^2$ (B) $c_1x^2 + c_2x^2 \ln(x) + a_1x^2(\ln(x))^2 + a_2x^4$
 (C) $c_1x + c_2x^4 + a_1 + a_2x^2$ (D) $c_1x + c_2x^4 + a_1x^2 + a_2x^4 \ln(x)$
- 13 請問 $e^{-2x} \cos x$ 是下列那一微分方程式的解？
- (A) $y''' + 7y'' + 16y' - 10y = 0$ (B) $y''' + y'' - 7y' - 15y = 0$
 (C) $y'' + 8y' + 17y = 0$ (D) $3y''' + 2y'' - 8y' - 16y = 0$
- 14 下列何者不可能是 $y'' + Ay' + By = 0$ (A 和 B 為常數) 的解？
- (A) x (B) x^2 (C) e^{x+1} (D) $e^x \cos(2x+3)$
- 15 若 c 為常數， $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 與 $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 分別為偏微分波方程式 (wave equation) 及偏微分熱方程式 (heat equation)，則下列何者錯誤？
- (A) $u(t, x) = \sin 2t \sin x$ 是偏微分波方程式之解
 (B) $u(t, x) = e^{-4t} \cos 3x$ 是偏微分熱方程式之解
 (C) $u(t, x) = e^t \sin 3x$ 是偏微分波方程式之解
 (D) $u(t, x) = e^{-t} \sin x$ 是偏微分熱方程式之解
- 16 若 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換為 $L\{f(t)\} = F(s)$ ，則 $L\{t * e^{2t}\}$ 為何，其中符號“*”為迴旋積 (convolution)？
- (A) $\frac{1}{s(s-2)}$ (B) $\frac{1}{s(s+2)}$ (C) $\frac{1}{s^2(s-2)}$ (D) $\frac{1}{s^2(s+2)}$
- 17 有一函數 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -5 < x < 0 \\ 3 & \text{if } 0 < x < 5 \end{cases}$ ，週期為 10，則傅立葉係數 $b_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{5}x\right) dx$ 之值為何？
- (A) $b_n = 0$ (B) $b_n = \frac{(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$ (C) $b_n = \frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}$ (D) $b_n = 3$
- 18 連續隨機變數 X 具有機率密度函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ，求機率 $P(0 < X \leq 1)$ 為何？
- (A) 1/9 (B) 2/9 (C) 1/3 (D) 4/9
- 19 設隨機變數 (random variable) X 和 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 為 $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{12} e^{-(x/4)-(y/3)} & 0 < x < \infty \text{ and } 0 < y < \infty \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$ 。則機率 $P[4 < X \leq 12, 0 < Y < \infty]$ 之值為何？
- (A) $e^{-3} - e^{-4}$ (B) $e^{-1} - e^{-3}$ (C) $e^{-1} - e^{-4}$ (D) 2/3
- 20 某連續隨機變數 X 之值域為 $[0, 1]$ ，密度函數為 $f(x) = 2x$ ，試求期望值 $E[X]$ 為何？
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

測驗式試題標準答案

考試名稱：108年公務人員高等考試三級考試暨普通考試

類科名稱：電力工程、電子工程、電信工程、醫學工程

科目名稱：工程數學（試題代號：2266）

單選題數：20題

單選每題配分：2.50分

複選題數：

複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	C	D	A	D	A	D	C	A	C	A

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	C	D	B	B	C	C	C	A	B	C

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備註：